

УДК 519.21

МНОГОМЕРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ**Ю.И. Волков**

Пропонуються методи побудови з натуральною параметризацією багатовимірних розподілів степеневих рядів.

In this article the methods of construction with natural parametrization of multivariate distributions of power series are proposed.

В одномерном случае понятие распределения степенных рядов появилось в работе [1], в многомерном – [2, 4, 6]. Позже этим распределениям было посвящено много других работ, см., например, [3, 5].

Пусть $k = (k_1, \dots, k_m)$ мультииндекс с неотрицательными целочисленными координатами и пусть ряд

$$\omega(y_1, \dots, y_m) = \sum_{k_1 \geq 0, \dots, k_m \geq 0} a_{k_1} \dots a_{k_m} y_1^{k_1} \dots y_m^{k_m},$$

$a_{k_1} \geq 0, \dots, a_{k_m} \geq 0$, сходится в полицилиндре

$$Y := \{y_1 \mid 0 \leq y_1 < R\} \times \dots \times \{y_m \mid 0 \leq y_m < R\}.$$

Распределение случайного вектора $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ с вероятностями координат

$$P\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_m = k_m\} = \frac{a_{k_1} \dots a_{k_m} y_1^{k_1} \dots y_m^{k_m}}{\omega(y_1, \dots, y_m)}, k_1 \geq 0, \dots, k_m \geq 0$$

называется распределением степенного ряда (РСР) функции ω .

Производящая функция:

$$P(z) = \sum_k \frac{(z_1 y_1)^{k_1} \dots (z_m y_m)^{k_m}}{\omega(y_1, \dots, y_m)} a_{k_1} \dots a_{k_m} = \frac{\omega(z_1 y_1, \dots, z_m y_m)}{\omega(y_1, \dots, y_m)}.$$

Отсюда получим математическое ожидание

$$M\xi = (M\xi_1, \dots, M\xi_m) = \left(y_1 \frac{\partial \log \omega}{\partial y_1}, \dots, y_m \frac{\partial \log \omega}{\partial y_m} \right) = \left(\frac{\partial \log \omega}{\partial \log y_1}, \dots, \frac{\partial \log \omega}{\partial \log y_m} \right) = \frac{\partial \log \omega}{\partial \log y}$$

и ковариационную матрицу $D\xi = \frac{d^2 \log \omega}{(d \log y)^2}$ с элементами

$$D_{ij} = y_i y_j \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y_i \partial y_j} \frac{1}{\omega} - \frac{\partial \omega}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y_j} \cdot \frac{1}{\omega^2} \right) + \delta_{ij} y_i \frac{\partial \omega}{\partial y_j} \cdot \frac{1}{\omega}.$$

Пусть $\omega(u) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k u^k, 0 \leq u < R$ и функция $f(x)$ является обратной к функции $x = y \frac{\omega'(y)}{\omega(y)}$.

1). Рассмотрим РСР функции $\omega(y_1, \dots, y_m) = \omega(y_1 + \dots + y_m)$. В этом случае

$y_1 = f(|x|) \frac{x_1}{|x|}, \dots, y_m = f(|x|) \frac{x_m}{|x|}$, а распределение случайного вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ такое:

$$\begin{aligned} P\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_m = k_m\} = \\ = \frac{a_{|k|}!}{\omega(f(|x|)) k_1! \dots k_m!} \left(\frac{x_1}{|x|} \right)^{k_1} \dots \left(\frac{x_m}{|x|} \right)^{k_m} (f(|x|))^{|k|}, k_1 \geq 0, \dots, k_m \geq 0, \end{aligned}$$

элементы матрицы $V(x) = \{v_{ij}\}$ находятся при помощи формул

$$v_{ij} = \delta_{ij} x_i - x_i x_j \left(\frac{\omega(u)}{\omega'(u)} \right)' \Big|_{u=f(|x|)}, i, j = 1, \dots, m,$$

$$\det V(x) = x_1 \dots x_m \left(1 - |x| \left(\frac{\omega(u)}{\omega'(u)} \right)' \Big|_{u=f(|x|)} \right). \quad (3)$$

2). Рассмотрим РСР функции $\omega(y_1, \dots, y_m) = \omega(y_1) \omega(y_1 y_2) \dots \omega(y_1 y_2 \dots y_m)$. Тогда

$$y_i = \frac{f(x_i - x_{i+1})}{f(x_{i-1} - x_i)}, i = 1, \dots, m, x_{m+1} := 0, f(x_0 - x_1) := 1,$$

ковариационная матрица:

$$V(x_1, \dots, x_m) = \begin{pmatrix} w_1 + \dots + w_m & w_2 + \dots + w_m & \dots & w_m \\ w_2 + \dots + w_m & w_2 + \dots + w_m & \dots & w_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_m & w_m & \dots & w_m \end{pmatrix}, \det V(x) = w_1 \dots w_m,$$

где

$$w_i = w_i(x) = \frac{f(x_i - x_{i+1})}{f'(x_i - x_{i+1})}, i = 1, \dots, m.$$

Пример 1. $\omega(y) = (1 + y)^n, n \in N$.

Имеем $f(x) = \frac{x}{n-x}, \frac{\omega(y)}{\omega'(y)} = \frac{1+y}{n} \left(\frac{\omega(y)}{\omega'(y)} \right)' = \frac{1}{n}$, а отсюда для элементов ковариационной матрицы РСР функции $\omega(y_1 + \dots + y_m)$ получим:

$$v_{ij} = \delta_{ij} x_i - x_i x_j n^{-1}, \det V(x) = x_1 \cdots x_m (1 - |x| n^{-1}).$$

Если обозначить через $p_1 = x_1/n, \dots, p_m = x_m/n$, то

$$P\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_m = k_m\} =$$

$$\frac{n!}{k_1! \cdots k_m! (n - |k|)!} p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m} (1 - p_1 - \dots - p_m)^{n - |k|},$$

т.е., получим полиномиальное распределение.

Пример 2. $\omega(y) = \exp y$.

В этом случае $f(x) = x$, а для элементов ковариационной матрицы РСР функции $\omega(y_1)\omega(y_1 y_2) \cdots \omega(y_1 y_2 \cdots y_m)$ получим $v_{ij} = x_i$, если $i \geq j$ и $v_{ij} = x_j$, если $i < j$, $\det V(x) = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3) \cdots (x_{m-1} - x_m)x_m$.

Для получения других распределений можно воспользоваться примерами из статьи [8].

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Noack A. A class of Random Variables with Discrete Distributions//Ann.Math.Statist.-1950.-№21, P.127-132.
2. Khatry C.G. On certain properties of power-series distributions//Biometrika. -1959.-№46, P.486-490.
3. Johnson L., Kotz S. Developments in Discrete Distributions, 1969-1980//
4. Int.Statist.Rev.-1982.-v.50, №1, P.71-101.
5. Kotz S., Johnson L. Encyclopedia of Statistical Sciences, Vol.6.-New York, John Wiley and Sons.-1985.
6. Johnson L., Kotz S., Balakrishnan N. Discrete Multivariate Distributions.Wiley.-1997-328p.
7. Evans M., Hastings N., Peacock B. Statistical Distributions. Wiley.-2000.-221p.
8. Волков Ю.І. Розподіли степеневих рядів із заданими коваріаціями.// Наукові записки Кіровоградського державного педагогічного університету ім. В. Винниченка, серія: фізико-математичні науки, Випуск 43, 2002.- С.16-21.